Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

14 de mayo de 2004.
Matemáticas III (MA–1116)

1[er] Parcial. (30 %)
TIPO B

1. (8 puntos) Dado el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 6y & + & 9z & = & 6 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & \alpha \\ 2x & + & 3y & + & \beta z & = & 1 \end{array}$$

Para que valores de α y β el sistema

a) tiene infinitas soluciones.

b) tiene solución única. Diga cuál es esta solución.

c) no tiene solución.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & \alpha \\ 2 & 3 & \beta & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R1 \leftarrow R1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & \alpha \\ 2 & 3 & \beta & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R4 \leftarrow R4-2R1]{\substack{R2 \leftarrow R2-3R1 \\ R3 \leftarrow R3-2R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \\ 0 & -1 & \beta-6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R2 \leftarrow -R2/2 \\ R4 \leftrightarrow R3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & \beta-6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R3 \leftarrow R3+R2 \\ R1 \leftarrow R1-2R2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{array}\right)$$

Si $\alpha \neq 4$ el sistema no tiene solución.

Si $\alpha = 4$, nos queda.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $\beta = 2$, $(\alpha = 4)$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos infinitas soluciones dadas por,
$x = -4 + 5z$, $y = 3 - 4z$, o por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\beta \neq 2$, $(\alpha = 4)$ nos queda.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R3 \leftarrow R3/(\beta-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R1 \leftarrow R1+5R3 \\ R2 \leftarrow R2-4R3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solución única

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resumiendo:

a) Tiene infinitas soluciones para $\alpha = 4$ y $\beta = 2$.

b) Tiene solución única para $\alpha = 4$ y $\beta \neq 2$. Solución $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) No tiene solución para $\alpha \neq 4$ y cualquier β.

2. (7 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halle $\operatorname{Adj}(A)$ y A^{-1}.

b) Halle la solución del sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: Los cofactores son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -15 \\ -6 & -13 & 9 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3*11 + 5*(-13) + 0*(-8) = -32$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A) = \frac{1}{-32} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -15 \\ -6 & -13 & 9 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-32} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -15 \\ -6 & -13 & 9 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-32} \begin{pmatrix} 31 \\ -25 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31/32 \\ 25/32 \\ 5/4 \end{pmatrix}.$$

3. (7 puntos) Sean A, B y C matrices 4×4, con $\det(A) = \frac{1}{4}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $\det(C)$.

b) Si $\left(C^2 A^{-1} B^{-1}\right)^T B^{-1} = I$, halle $\det(B)$.

Solución:

a)

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & b & b & 0 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ab(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -ab(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -ab(1+2) = -3ab.$$

b) Usando las propiedades

$$\det(A^T) = \det(A), \qquad \det(A * B) = \det(A) * \det(B) \qquad \text{y} \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

tenemos que

$$\frac{\det(C)^2}{\det(A)\det(B)^2} = 1$$

de donde

$$\det(B)^2 = \frac{\det(C)^2}{\det(A)} = \frac{9a^2b^2}{\frac{1}{25}} = 15^2 a^2 b^2,$$

por lo tanto

$$\det(B) = \pm 15ab.$$

4. (8 puntos) Sean A y B matrices $n \times n$. Diga (justificando) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $BA = B$ entonces $(AB)^2 = AB^2$.

b) $[(AB)^{-1}]^T = (B^{-1})^T(A^{-1})^T$.

c) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$.

d) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Solución:

a) (Verdadero) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = ABB = AB^2$.

b) (Falso) $[(AB)^{-1}]^T = [(B^{-1})(A^{-1})]^T = (A^{-1})^T(B^{-1})^T$.
Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [(AB)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [B^{-1}]^T[A^{-1}]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) (Falso) Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) (Falso) Contraejemplo, las mismas matrices del ejercicio anterior.